View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Hosei University Repository

法政大学学術機関リポジトリ
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

アルゴリズムの構造を反映する数理モデルの構成と応用

著者	倉田 俊彦
ページ	1-5
発行年	2011-05
URL	http://hdl.handle.net/10114/7290

Hosei University Repository

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 27 日現在

機関番号：３２６７５
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2010
課題番号：１９７０００１２
研究課題名（和文）　アルゴリズムの構造を反映する数理モデルの構成と応用

研究課題名（英文）　Mathematical semantics of the internal structure of algorithms

研究代表者
倉田　俊彦（KURATA TOSHIHIKO）
法政大学・経営学部・教授
研究者番号：４０３１１８９９

研究成果の概要（和文）：
本研究において得られた重要な成果としては，広く知られる集合の層の概念において **Sets**（集合と関数の圏）の部分を **Cpos**（完備半順序集合と連続関数の圏）に置き換えることによって，自然な形で完備半順序集合の層とその上の自然変換が構成する圏 **Cpos(X)** の枠組を構築できたことが挙げられる。そして，この新たに得られた圏 **Cpos(X)** は外延性を排除しながらプログラムで使用される様々な構文を矛盾なく解釈する強力な仕組みを持ち，「アルゴリズムの内部構造を反映した数理モデルの一般的な枠組」として理想的な解答を与えている。

研究成果の概要（英文）：
As a result of this research, we introduced a new notion of sheaves of complete partially ordered sets from the ordinary definition of sheavs of sets, which is given by replacing the category **Sets** of sets and functions with the category **Cpos** of complete partially ordered sets and continuous functions. The framework so obtained allows us to have the cartesian closed category **Cpos(X)** in which we can develop various structures for denotational semantics of programming languages excluding the condition of extensionality. This is because of a number of desirable features of **Cpos(X)** in order to interpret flexible syntactical devices of programming languages.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	2,600,000	540,000	3,140,000

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：プログラム意味論，ラムダ計算，型理論，層論，領域理論，外延性，高階遂次性，Kripke モデル

１．研究開始当初の背景

一般に，プログラミング言語によって記述される様々な計算処理の意図は，言語処理系を経由して得られる計算機上の動作として把握することができる。その一方で，（言語処理系の設計方針などに依存しない）プログラムが本来持っている普遍的な意味を数学的に規定する為の手法も研究されている。このようなアプローチは表示的意味論と呼ばれ

Hosei University Repository

る。表示的意味論を実現する数理モデルの構成は，プログラミング言語の基礎理論における重要な研究対象であり，プログラム解析等の実用的側面とも関連して活発な研究が行われている。

プログラミング言語の理論的性質を考察する際に用いられる基礎言語体系としてラムダ計算がある。現在では様々なラムダ計算の体系が考案されているが，それら全てに共通する根幹部分は単純型付ラムダ計算と呼ばれる体系としてまとめられる。そして，その数理モデルに必要不可欠な性質は CCC （カルテシアン閉圏）と呼ばれる圏構造としてまとめられる。そのような圏構造の代表例としては，集合と関数から構成される圏 **Sets** が広く知られている。

圏 **Sets** に基づくプログラム意味論においては，プログラムは関数として解釈されるため，同じ入力に対して同じ出力を行うプログラムには全て等しい意味が割り当てられることとなる。こうした外延性の条件を仮定すると意味論の理論展開は容易になるため，ラムダ計算の数理モデルに関する既知の研究結果の殆どは（数理論理学における伝統的なモデルの構成と同様に）圏の各射に外延性を仮定した CCC 構造に基づく形式を持っている。

しかし，その一方で，このように必要以上に強い概念が取り入れられたモデル概念においては，プログラムの入出力の関係のみに依存してその意味が決められることになり，必然的に（計算機科学に特有の概念である）アルゴリズムの内部構造を捉えることは不可能となる。

２．研究の目的

上記のような背景の下で，本研究課題の最も大きな目的は，（利便性のために取り入れられている）必要以上に強い外延性の概念を排除することによって「従来の数理モデルとは本質的に異なる特徴を持つ構造を構築すること」にある。そして，それによって，従来の理論と同様に様々なデータ構造の構文を矛盾なく解釈できる利点を維持しながら「出力を得るまでのアルゴリズムの構造の違いを反映できる数理モデル」の理論を確立し，更には「そうした意味論の一般的な特徴をプログラミング言語の実装に応用する可能性を探る」ことを目指している。

数理モデルの先駆的研究は数理論理学にみられるが，計算機科学に特有の概念であるアルゴリズム構造を捉える仕組みを，既知の研究から見つけることはできない。その意味で，本研究課題の目的自体が，従来のモデル論の方向性と大きく異なる特徴を持っている。（また，アルゴリズムの構造は，計算機科学の本質的な課題に直接関与するもので，その特徴を様々な抽象度で数学的に捉える仕組みを構築することの意義は大きい。）

こうした視点の下では，様々な興味深い問題が考えられるが，その中でも最も本質的な課題を具体的な形式に書き下すと「外延性を排除した CCC の性質を保ち，更に，多様なデータ型を伴う強い表現力を持った構文体系の解釈を可能とするための仕組みを兼ね備えていて，プログラム（特にラムダ計算）の持っている有限近似性や高階逐次性等の特徴を捉えることの出来る数理構造を構築すること」となる。そして，以下のように，より焦点を絞った具体的課題の考察の基づく多角的なアプローチによって，最終的に上記問題の答えを明らかにすることを目標としている。

(1) 単純型付ラムダ計算よりも強い表現力を持つ体系については，CCC の構造のみで解釈を与えることはできず，様々な性質を CCC に付加する必要が生じる。そして，そのための常套手段として領域理論の手法が広く知られている。そこで，「単純型付ラムダ計算に関する外延性を排除した数理モデルの理論」を構築したら，それと領域理論の仕組みを組み合わせることによって，より強い体系に対して機能する外延性を排除したプログラム意味論の一般理論を構築したい。

(2) これまでの考察によって「単純型付ラムダ計算の体系において，ある種の２分木に相当するラムダ項に注目し，異なる２分木の解釈が常に異なるようなモデルに基づく意味論においては外延性を排除することはできない」ことが証明できている。この結果において，２分木に関する条件は単純型付ラムダ計算の特性に大きく依存するもので，他の体系ではこうした条件が不要になる可能性がある。そこで，より強いラムダ計算の体系に対して「２分木に関する条件なしで閉項の解釈から外延性を排除することはできないか」明らかにしたい。

(3) CCC おけるラムダ計算の標準的な解釈の仕組みは「プログラムの構文のみを CCC の中で解釈し，基盤にある論理の解釈は **Sets** の中で行う」形式を持っていた。そして，これまでの考察によって，この標準的な解釈の仕組みは「トポス

Hosei University Repository

Sets$^{\mathbf{Cop}}$ において，終対象に相当するステージに限定した恒真性」に制限して論理概念の解釈を行っていることと同等であることが分かっている。そこで，「普遍恒真性」と「終対象ステージに限定した恒真性」を各々「アルゴリズムの構造に関する解釈の視点」と「プログラムの適用に関する解釈の視点」と見なすことによって，外延性を排除した解釈構造の考え方を包括的に説明する枠組みの手掛かりを得たい。

(4) 外延性を排除した数理モデルを構築することは，プログラムの様々な同値関係を純粋に（CCC の射に関する）等式の形で記述することに相当する．そこで，上の考察の過程で得られる等式に方向を与え，ラムダ抽象（関数）の内部を機械的に評価する簡約規則の作成を試みたい。（通常の関数型プログラミング言語では，関数 f の内部に評価の余地があったとしても，それらは定義時に評価されることはなく，f(d)，f(e)，...のように個々のデータに適用された段階で毎回評価されることとなる。）また，「それによって得られるプログラム評価の枠組み」と「通常の関数型プログラミング言語で行われる値呼び出し評価の枠組み」の効率を比較したい。こうしたアプローチは，従来の研究にはない視点から関数型プログラミング言語の実装に伴う改善を目標としていて，実用的な観点からも有意義であると考えている。

３．研究の方法

上記の各々の課題には，「その起源となる考察」と「それに続いて解決されるべき課題」が存在する。そのため，全体的な研究の進め方も，これまでの考察で得られた結果を考慮しながら，より基本的な課題から順番に解決していく流れを持っている。その中でも，最も解決したい重要な課題は(1)である。これは理論的にも大掛かりな問題であり，解明しなければならない障害が数多く存在することが予想されたため，この問題に関しては更に細かなステップに分割して個々の障害を独立して考察するアプローチを計画している。

具体的には，単純型付ラムダ計算よりも強力な枠組みの中から，**PCF** と型無ラムダ計算と呼ばれる二つの体系に着目することを考えた。両者の計算機構を比較すると **PCF** の方が数理モデル構築のために配慮すべき問題も少なく済むこととなる。そこで，課題(1)を解決するために最初に取り組む問題として，「単純型付ラムダ計算の数理モデルに関してこれまでの考察で得られた結果を **PCF** に対して機能する形に拡張して，外延性を排除した具体的数理モデルの構成」を試みる。そして，**PCF** に対して十分整備されたモデルの枠組が得られた段階で，それを足掛かりにして，型無ラムダ計算に対する同様の考察を進めることを計画している。

このように，各ステップにおいて本質的な拡張が必要となるように段階的に問題を配置していくことによって，解決すべき問題を分離・明確化することが可能となる。また，各段階を解決する毎に一定の成果をまとめることができるので，理論展開の整備の面から見ても利点が多いと考えている。更に，個々の課題によって得られた知見を全体的な考察の枠組みに活用するアプローチにおいては，一つの問題に集中する場合と比べて，全体の考察が行き詰まる可能性は極めて低いと考えられる。

例えば，**PCF** の数理モデルを考察する段階で問題となることは「CCC の構造に加えて圏の各射に不動点の存在が保証されていること」が本質的な要請となる。そして更に，型なしラムダ計算の数理モデルを考察する段階で問題となることは「CCC 構造の中に反射的対象の存在を保証する仕組み」を付加することが本質的な課題となる。（そのための手法としては，Scott によって考案された構成法を採用し，埋め込み・射影に対応する概念を明示的に導入して対象の拡大列の帰納極限の構成を行うことを計画した。）

課題(4)について，(1),(2),(3)の考察の過程から「ラムダ抽象の内部の評価を純粋に等式公理のみで書き下す様々な方法」が抽出できるので，その中から適切なものを見極めて，プログラムの評価規則に利用したいと考えている。実際に，ラムダ項として記述されたプログラムをコンビネータの構文に変換して，コンビネータの等式公理に基づく評価規則に沿って計算を進める手法が知られている。その方針に沿った実装を考えることにより，「関数 f が定義された段階で，その内部を全て評価して得られるコード g を生成する言語」の実現が期待できる。そして，最終的には g(d)，g(e)，... のように最適化されたコードを各データに適用した場合の出力算出効率の上昇を実験によって見極めることを目指している。

４．研究成果

上に述べた課題に対して，考察の初期段階で大きな進展があった。具体的には，位相空間 (X,OX) から **Sets** への反変関手に一種の

Hosei University Repository

compatibility の概念を付随して定義される層の概念を発展させて，**Sets**（集合と関数の圏）の部分を全て **Cpos**（完備半順序集合と連続関数の圏）に置き換えても compatibility の条件をそのままの形で扱うことが可能であることが分かった。そして，それによって新たに **Cpos(X)**（完備半順序集合の層とその上の自然変換の圏）の枠組を定義することができた。更に，こうして新たに得られた圏 **Cpos(X)** の特徴として，

(1) 任意の２つの層の間に定義される自然変換に対して，自然な順序を導入することが可能であり，それによって自然変換の集合自体も完備半順序集合となることが証明できる。そして，このことが２つの層の冪の存在を保証し，直積や終対象の存在も同様に証明できるので，**Cpos(X)** は CCC となる。

(2) **Cpos(X)** においては，従来のプログラム意味論における領域方程式の解法と同様の手法を展開することが可能で，任意の拡大列に対して，その双極限（ある種の見方によって射影極限かつ帰納極限）となる層を構成することができる。更に，**Cpos(X)** 上の任意の連続関手（双極限を保存する関手）に対してその不動点となる層を構成することができる。

が分かり，一般的に **Cpos(X)** が十分な大域断面を持たないことから，「**Cpos(X)** は外延性を排除しながら様々なデータ構造や型無しラムダ計算のような強力な構文を矛盾なく解釈することが出来る数理モデルの一般的な枠組」を実現し，既知の研究にはない長所を数多く持つことが保証される。これによって，本研究課題の骨格となる理論的枠組の導入については完全に解決されたといえる。

このようにして，本研究課題の考察を進めるにあたって，最も困難な問題と思われた「アルゴリズムの違いを反映できる数理モデルの一般的な枠組みの構築」については「完備半順序集合の層」の概念によって理想的な形で解決できた。その意味で，当初の予想以上の進展を得ることができた。

また，そうした進展に伴って新たな興味深い問題が幾つも派生する結果となり，今後の課題としては，特に「既知の研究で考案された枠組と **Cpos(X)** の比較を行い，両者の関係を明らかにすること」が重要であると考えている。

具体的には，**PCF** に対する fully-abstract モデル構築の研究から「アルゴリズムの内部構造を反映する具体的な数理モデルの構成」が幾つか得られていて，「そうした枠組が層の概念を特殊化することによって得られないか？」更に「できない場合は全てを統一的に説明できるより抽象的な概念が存在しないか？」を明らかにすることが（今回得られた概念の位置付けを明らかにするためにも）必要であると考えている。この問題についても，現時点で，幾つかの部分的な対応関係が得られていているので，その結果を手掛かりに完全な対応を完成させたい。

このように，層構造とその間に定義される自然変換を利用して「プログラムが答を算出するまでの計算構造」に対する数学的解釈を与えること並行して，主に2011年度の考察において，計算表現の中で重要な役割を果たす型の概念に焦点を当て，多相型の機構に対応する論理体系として知られる2階直観主義命題論理の形式的体系 **NJ**$_2$ について，その解釈を与える層構造について考察を行った。（そのような層の間に定義される自然変換を調べることにより，これまでの考察で得られた知見を更に「多相型を伴う計算構造」に展開することが期待できる。）

NJ$_2$ に関して完全性定理が確立されるモデル概念としては，Sobolev による Kripke モデルの層構造が知られている。その中では，可能世界の間に半順序構造が入れられていて，各可能世界における含意と全称束縛の解釈は，それよりも大きな全ての可能世界を考慮することによって与えられる。これに対して，このモデルで利用されている半順序の仕組みを Alexandrov 位相を伴った位相空間を用いて記述することが可能である。そして，これを足掛かりにして，より一般的な位相空間の視点から解釈の定義を与え直し，新たな Kripke モデルの定義を与えることができた。そして，この一般化された枠組の下でも，依然として **NJ**$_2$ の完全性が保証されていることを証明した。更に，sober な位相空間に基づくモデルの中に完全性を保証する規範的構造が存在することを発見し，広く知られた Stone 双対性に基づいて，Kripke モデルと同等な解釈を持つ束論的モデルの枠組みによっても完全性定理を確立することができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

①倉田俊彦，2階直観主義命題論理のKripkeモデルと束論的モデルの双対性，京都大学数理解析研究所講究録1729 （査読無），2011年

Hosei University Repository

2月，1-8ページ。

②倉田俊彦，完備半順序集合の層に関する双極限の構成，京都大学数理解析研究所講究録1635 （査読無），2009 年 4 月，60-76 ページ。

〔学会発表〕（計 6 件）

①倉田俊彦，藤田憲悦，On the models of 2nd order intuitionistic propositional logic，日本数学会年会，2011年3月21日，早稲田大学理工学術院。

②倉田俊彦，藤田憲悦，2階直感主義命題論理の代数的モデルについて，RIMS共同研究（形式体系と計算理論），2010年9月15日，京都大学数理解析研究所。

③倉田俊彦，Sheaf Semantics and Higher Order Sequentiality，日本数学会年会（分科会特別講演），2009 年 3 月 26 日，東京大学数理科学研究科。

④倉田俊彦，A fixed point construction for continuous functors on sheaves of dcpos，日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 27 日，東京工業大学。

⑤倉田俊彦，Lambda-algebras by inverse limit construction on sheaves of dcpos，RIMS 共同研究:証明論と論理･計算の構造，2008 年 9 月 8 日, 京都大学数理解析研究所。

⑥倉田俊彦，完備半順序集合の層について，証 明論研究集会，2007 年 12 月 3 日，首都大学東京。

〔図書〕（計 1 件）

①倉田俊彦，京都大学数理解析研究所考究録1635（RIMS 共同研究：証明論と論理・計算の構造報告集），京都大学数理解析研究所，2009 年 4 月，133 ページ。

６．研究組織

(1)研究代表者

倉田　俊彦（KURATA TOSHIHIKO）

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：４０３１１８９９

(2)研究分担者（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者（　　）

研究者番号：